数理解析研究所講究録
195巻 1973年 61-69

Semi-linear な拡散方程式の解の漸近的性質

阪大理　池田信行

1°. 簡単な semi-linear な方程式の解 $u(t,x)$ について、$t \uparrow \infty$ の時の性質に関する 2,3 の注意をのべる。これらの多くは亀高惟倫、渡辺信三両氏との討論に負っている。

2°. まず良く知られていることを簡単に要約したい。個体の分裂現象の模型として用いられる分枝ブラウン運動を決める方程式はつぎの形の semi-linear な拡散方程式である。(例えば Ikeda-Nagasawa-Watanabe [6])。

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + G(u) - u \\ u(0,x) = f \end{cases}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,
$$

ここで G は $G: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ でつぎの形で与えられる。

$$
(2)\qquad G(\xi) = \sum_{n \geq 2} p_n \xi^n, \qquad p_n \geq 0, \qquad \sum_{n \geq 2} p_n = 1.
$$

$v = 1 - u$ とおけば、これはつぎの方程式をみたす。

$$
(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u + F(u) \\ u(0,x) = f \end{cases}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d,
$$

ここで $F: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ はつぎの形で決められる。

(4) $$F(\xi) = 1 - \xi - G(1-\xi)$$ 。

いまとくに $\sum_{n \geq 2} n p_n < \infty$ の場合を考えると、このFはつぎの性質を持っている。

(5) $$\begin{cases} \text{(a)} \quad F(0) = F(1) = 0, \quad F(\xi) > 0, \quad \xi \in (0,1), \\ \text{(b)} \quad F'(\xi) \Downarrow, \quad \alpha = F'(0) > 0 \end{cases}$$.

この性質を持った方程式(3)は早くも1937年にKolmogorov-Petrovsky-Piscounoff [8]によって生物の問題に関連して取扱われている。この方程式についていくつかの問題が考えられるが、こゝで取扱うのはAbrahams-Tsuneto [1] に関連したつぎのことである。f を $0 \leq f \leq 1$, $f \not\equiv 0$ なる連續関数とする時、方程式(3)の解 $u(t,x)$ について

(6) $$\lim_{t \uparrow \infty} u(t, x) = 1$$

となるか。この事実は(5)よりやゝ弱い条件のFに対してKaneko [7] (1964, Theorem 2) で肯定的に示されている。また分枝ブラウン運動についての極限定理からも自動的に示される (S. Watanabe [11], [12])。また S. Watanabe [11] の考えを使えば有界領域の問題で近似する方法で Kaneko [7] と独立に示される。(亀高-池田)。

3°. こゝでの注意はいづれも(6)式が成り立つ事情に

ついてのことであるが，簡単のため $d=1$ の時考えて，(3)をつぎの形に変えてみる。

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta u - c\dfrac{\partial u}{\partial x} + F(u), & \\ u(0,x) = f(x), & (t,x)\in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^1. \end{cases}$$

この場合 $c\neq 0$ と $c=0$ の場合で (6) に関する事情が非常に異なる。 f は常に $0\leqq f\leqq 1$ とする。

[I] $\alpha \leqq \dfrac{c^2}{2}$ の時。

(a) f が連続で，$\mathrm{Supp}(f)$ が compact ならば

$$(8)\qquad \lim_{t\uparrow\infty} u(t,x) = 0$$

(b) $\dfrac{1}{2}\Delta u - c\dfrac{\partial u}{\partial x} + F(u) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} u(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$

の解 $u_0(x)$ （確かに存在する。Kolmogorov－Petrovsky－Piscounoff [8]）に対し，

$$f(x) = u_0(x) + w(x),\quad 0\leq f\leq 1,\quad w(x)\geqq 0,\quad \mathrm{Supp}(w):\mathrm{compact}$$

と表わせるならば

$$\lim_{t\uparrow\infty} u(t,x) = u_0(x)$$

となる。

[II] $\alpha > \dfrac{c^2}{2}$ の時。 $c=0$ の時，すなわち 2° でのべたことが成りたつ。

このことは (7) に対応する分枝マルコフ過程でみれば直観的な説明が出来る。(7) の場合も，[I]の条件の下ですら，

$1 > f \equiv \delta > 0$ ならば (6) がなりたつ。このことは $\mathbb{R}^1$ 全体にいる粒子数は $c=0$ の時と同じで時間 t と共に無限大に近づく。ところが [I], (a) の事実はある compact な集合にいる時間 t における粒子数 ξ_t は $t \uparrow \infty$ の時 0 に近づくことに対応している。実は粒子が生れるのは 2° の $c=0$ の時と同じにおきるのだが，drif の力で無限遠点にはこばれてしまって compact な集合の中からは消えてしまうことになる。このことは一般の分枝マルコフ過程で平均個数の方程式，すなわち基本方程式の線型近似に対応する半群 H_t によって，$H_t 1 = 1$ な時を critical とすることが必ずしも適当でないことを示している。先にのべた [I], [II] の場合わけはつぎの事実に基づいている。方程式 (7) の線型部分

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u - c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

の基本解が

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y-ct)^2}{2t}} \tag{10}$$

で与えられ，任意に固定した $x, y \in \mathbb{R}^1$ に対して，

$$\mu \equiv \mu(x, y) = \sup\{\lambda;\ \lim_{t\uparrow\infty} e^{\lambda t} p(t, x, y) = 0\} \tag{11}$$

とおけば，$\mu = \frac{c^2}{2}$ となる。こう考えると [I] にのべた事

情はもっと一般に存在する。例えば

4°. Lobačevskiĭ 平面の場合。　いま上半平面 M で Laplace-Beltrami 作用素

$$(12)\qquad \Delta = x_2^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right), \qquad x=(x_1,x_2)\in M,$$

を考える。この Δ と (5) をみたす F に対し方程式 (3) を考える。その時は,

[I]′, $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ の時。 [I], (a) と同じことがなりたつ。

[II]′, $\alpha > \frac{1}{2}$ の時。 $0\leqq f\leqq 1$, $f\not\equiv 0$ で連續ならば

$$(13)\qquad \varliminf_{t\uparrow\infty} u(t,x) > 0, \qquad x\in M,$$

となる。

この事実の証明には (12) の Δ に対する熱方程式の基本解が

$$(14)\qquad p(t,x,y)=\frac{e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{2}}{(2\pi t)^{3/2}}\int_{\rho(x,y)}^{\infty}\frac{b\,e^{-b^2/2t}\,db}{\sqrt{\cosh b-\cosh\rho(x,y)}}$$

$\rho(x,y)$: hyperbolic distance

で与えられることが重要である。(McKean [9]). (14) を使えば, (11) の μ はこの場合は $1/2$ となる。この場合も分枝マルコフ過程を用いた [I]′ の事情の説明は S. Watanabe [12] の結果によって出来る。

5°. (5)式の(b)の条件は 2° でのべたように分枝マルコフ過程の立場で考えると必然性があった。その他にも応用上はしばしば自然な条件として現われ, Kolmogorov–Petrovsky–Piscounoff [8] 以来, しばしば用いられている。しかし方程式を形式的に考え, なりたつ結果の方から注目すれば必ずしもそれなくして論じられることが多い。Fujita [2] は Gelfand [3] に関連してその種の1つの事情を明らかにしている。(6)の性質に関連しても (5)式で (a) だけを残して条件 (b) を取去った時にどうなるか問題になる。そのために (6) の性質が保証される事情をもう少し分解してみよう。

(i) まず線型部分の基本解を $p(t,x,y)$ とするとき, まず初期条件 f として, $\exists x_0$, $\exists \gamma_0$: $\forall \gamma \geq \gamma_0$ に, $\forall A>0$ について $f(x)=Ap(\gamma,x,x_0)$ に対して (6) を示せば充分である。

(ii) $\gamma(\geq \gamma_0)$ を充分大きくとれば初期条件

$$f(x) = Ap(\gamma, x, x_0)$$

に対し,

$$\exists t_0>0,\ \exists A(t) : A(t) \uparrow \ t\in[0,t_0],\ A(0)=A$$

$$(15) \qquad u(t,x) \geq A(t)p(\gamma,x,x_0) \quad , \quad t\in[0,t_0].$$

この(ii)の事実は Hayakawa [4], 杉谷 [10] によって Fujita [2] の結果に関連して用いられたものである。この事実は (6) の性質に限らず, semi-linear な方程式の解の漸近的性質の考察、

にとって基本的な役割を果たすことが多い。この (15) は次のようにして示される。積分方程式の問題になおすと，

$$u(t,x) = A\,p(\gamma+t, x, x_0) + \int_0^t\!\!\int p(s,x,y)\,\overline{F}(u(t-s,y))\,ds\,m(dy)$$

となる。ここで比較定理により

$$u(t,x) \geqq A\,p(\gamma, x, x_0) + \int_0^t H(s,x;\gamma,t)\,ds$$

(16)

$$H(s,x;\gamma,t) = \frac{\partial}{\partial s}p(s+\gamma, x, x_0)\,A + \int p(s,x,y)\,\overline{F}(A\,p(\gamma+t-s, y, x_0))\,m(dy)$$

となる。ここで，もし $\exists\, t_0 > 0$ で

(17) $$H(s,x;\gamma,t) \geqq B(s,x;\gamma,t)A\,p(\gamma,x,x_0),\quad B(s,x;\gamma,t) > 0,\quad 0 < s \leqq t \leqq t_0,$$

ならば (15) が保証される。例えば 2°) の場合で (5) の (b) が成立するならば，つぎのようにして (17) が保証される。

$K < \alpha$ なる任意の $K > 0$ を1つ固定する。そのとき，
$\exists\, \delta_0$: $\delta_0 > 0$, $\overline{F}(\xi) \geqq K\xi$, $\xi \in [0, \delta_0]$ 。$\gamma > d\sqrt{2}/K$ とする。
一般性を失わず $K > b = \sup A\,p(\gamma, x, 0)$ とする。いま
$dv/dt = \overline{F}(v)$, $v(0) = b$ の解 $v(t)$ に対して，$t_1 = \inf\{t;\ v(t) = \delta_0\}$
とおけば，$t_0 = t_1 \wedge \gamma$ に対してつぎのことが言える。

(18)

$$H(s,x;\gamma,t) \geqq A\left\{\left[\frac{x^2}{(s+\gamma)^2} - \frac{d}{2}\,\frac{1}{s+\gamma}\right]\sqrt{\frac{\gamma}{s+\gamma}} + K\sqrt{\frac{\gamma}{t+\gamma}}\right\}p(\gamma,x,0)$$

$$\geqq \left\{\frac{K}{\sqrt{2}} - \frac{d}{2\gamma}\right\}A\,p(\gamma,x,0), \qquad 0 < s \leqq t \leqq t_0$$

よって (17) がなりたつ。

この考察からわかる通り (5) 式の条件 (b) は充分すぎる。また (15) の主張のためには，その内容から F の $\xi=0$ の近傍での挙動のみがかゝわって来る。

いま (11) 式の μ が x, y に関係しない定数としてきまるときは，多くの場合に (5) 式 (b) をのぞいても

$$F'(0) > \mu, \quad F'(0) < \mu$$

のいずれかならば (15) に対する事情は比較的に簡単である。とくに詳しい考察を要するのは $F'(0) = \mu$ のときである。ある $\delta_1 > 0$ に対して，

$$F(\xi) = \mu\xi + F_1(\xi), \quad \xi \in [0, \delta_1], \quad F_1'(0) = 0 \tag{19}$$

の時に，F_1 にどのような条件をおけば (15) がなりたつかが問題である。早川 [5] は最近 (3) の場合に (15) のための F_1 に対する充分条件を与え，(6) の性質と Fujita [2] の結果の両方に共通する特徴を導いている。コンパクトな多様体の場合，$\mathbb{R}^d$ の有限領域の場合，Lobačevskiĭ 空間の場合等に具体的にしらべてみると，(15) のための F_1 についての条件は個々の場合で非常に違って来て，関数 $k(t,x,y) = e^{\mu t} p(t,x,y)$ の性質が密接に関連して来る。

[1] E.A.Abrahams-T.Tsuneto . Phys. Rew. 152 (1966) .

[2] H.Fujita. Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 18 .

[3] I.M.Gelfand . Amer. Math. Soc. Transl. (2) 29(1963).

[4] K.Hayakawa . Proc. Japan Acad. 49 (1973) .

[5] 早川款達郎 . 未発表

[6] N.Ikeda-M.Nagasawa-S.Watanabe. Jour. Math. Kyoto Univ. 8(1968) , 9(1969) .

[7] Ya.I. Kaneli . Mat. Sbornik 65(1964).

[8] A.N.Kolmogorov-I.G.Petrovsky-N.Piscounoff. Bull. Moskow Univ. 1(1937) .

[9] H.P.McKean . Comm. pure and app. Math. 25(1972).

[10] 杉谷貞男 . 阪大セミナーでの報告

[11] S.Watanabe . Jour. Math. Kyoto Univ. 4 (1965) .

[12] S.Watanabe . Markov processes and Potential theory eaited by J. Chover. 1967 .